Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 9

Transfert d'énergie par conduction thermique – TD

Exercice 1 : Question de cours

On considère un solide homogène de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ, dont on suppose que la température $T(x,t)$ ne dépend que de la coordonnée x et du temps t.

1. Établir l'équation de la diffusion thermique en réalisant un bilan d'enthalpie à une tranche de ce solide comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ de surface S entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Production d'entropie dans une barre

On considère une barre cylindrique d'axe x, de longueur L et de section S_0. Elle est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ, dont la surface latérale est calorifugée. Elle est en contact en $x = 0$ avec un thermostat à la température T_1, et en $x = L$ avec un thermostat à la température T_2 (où $T_2 < T_1$). On suppose que le régime stationnaire est établi.

1. Résoudre l'équation de la diffusion thermique pour déterminer le profil de température $T(x)$ dans la barre.

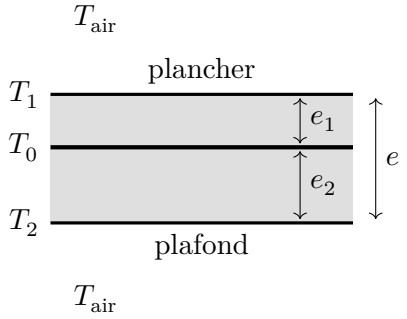
2. En déduire le flux thermique à travers la barre.

3. À l'aide du second principe de la thermodynamique, déterminer l'expression de l'entropie créée par unité de temps en fonction de L, S_0, λ, T_1 et T_2.

4. Conclure sur le caractère irréversible de la conduction thermique.

Exercice 3 : Chauffage au sol et au plafond

On considère une fine plaque constituée de résistances électriques qui permettent de maintenir sa température constante à $T_0 = 30°\mathrm{C}$. Elle est noyée dans une dalle de béton d'épaisseur $e = 16\,\mathrm{cm}$ et de surface S, dont la conductivité thermique est $\lambda = 1{,}2\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. En régime stationnaire, l'effet Joule produit par les résistances se partage entre un flux ascendant qui chauffe un plancher situé à une distance e_1 et un flux descendant qui chauffe un plafond situé à une distance e_2, comme schématisé ci-dessous. On modélise les échanges conducto-convectifs entre ces surfaces et l'air à la température $T_{\mathrm{air}} = 18°\mathrm{C}$ dans les deux pièces à l'aide de la loi de Newton avec un coefficient de transfert $h_1 = 6{,}0\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ pour le plancher et $h_2 = 4{,}0\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ pour le plafond.



1. Proposer un schéma électrique équivalent à la situation en définissant les résistances thermiques mises en jeu.

Pour un confort optimal, la température du plancher doit être maintenue à $T_1 = 26°\mathrm{C}$.

2. Déterminer l'épaisseur e_1 de béton entre la plaque et le plancher permettant de réaliser cette condition.

3. En déduire alors la température T_2 du plafond.

4. Déterminer la puissance surfacique générée par les résistances pour maintenir la plaque à la température T_0.

Exercice 4 : Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement augmente la surface de contact entre un solide chaud et l'air ambiant, afin d'améliorer le refroidissement du solide en dissipant davantage de chaleur par conducto-convection.

On considère une ailette cylindrique semi-infinie d'axe (Ox) et de rayon $R = 1{,}0\,\text{mm}$. Sa conductivité thermique est $\lambda = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. L'ailette est en contact avec un matériau à la température $T_0 = 50°\text{C}$ par sa section d'abscisse $x = 0$, et avec l'air ambiant à la température $T_\text{a} = 20°\text{C}$ sur le reste de sa surface. On suppose que le régime stationnaire est établi, et que la température $T(x)$ sur une section d'abscisse x de l'ailette est uniforme. Le flux thermique transmis à l'air ambiant vérifie la loi de Newton avec un coefficient de transfert conducto-convectif $h = 15\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

1. En réalisant un bilan thermique sur une tranche de l'ailette comprise entre les abscisses x et $x + \text{d}x$, montrer qu'en régime stationnaire la température vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\text{d}^2T}{\text{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}\,T(x) = -\frac{1}{\delta^2}\,T_\text{a}$$

avec δ une longueur à déterminer.

2. Déterminer l'expression du profil de température $T(x)$ en résolvant cette équation différentielle.

3. Calculer le flux thermique évacué par l'ailette vers l'air ambiant.

4. Calculer le flux thermique qui serait évacué par le matériau à la température T_0 à travers cette même surface s'il n'y avait pas d'ailette de refroidissement.

5. En déduire une expression de l'efficacité de l'ailette, puis calculer sa valeur numérique.

Exercice 5 : Onde thermique dans le sol

Les variations de température à la surface du sol, qu'elles soient journalières (jour/nuit) ou annuelles (été/hiver), se propagent dans le sol sous la forme d'une onde thermique. On considère dans cette étude que le sol est un milieu homogène occupant le demi-espace $x > 0$, avec x un axe vertical orienté vers le bas, dont le coefficient de diffusion thermique est $D = 1.10^{-6}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

En supposant que la température à la surface $x = 0$ oscille de façon sinusoïdale autour d'une valeur moyenne T_m, on chercher une solution à ce régime sinusoïdal forcé sous la forme complexe :

$$\underline{T}(x,t) = T_\text{m} + \theta_0\,\text{e}^{\text{j}(\omega t - \underline{k}\,x)}$$

avec $\underline{k}$ le vecteur d'onde.

1. Rappeler l'équation de la diffusion thermique vérifiée par $\underline{T}(x,t)$.

2. En déduire que le vecteur d'onde s'exprime de la forme :

$$\underline{k} = \pm\frac{1-\text{j}}{\delta}$$

avec δ une constante à exprimer. On rappelle pour cela la propriété mathématique : $-\text{j} = \text{e}^{-\text{j}\,\pi/2}$.

3. Justifier que l'une des deux solutions de $\underline{k}$ est impossible physiquement.

4. En déduire l'expression réelle de la température $T(x,t)$.

5. Calculer la valeur de δ pour le cas des oscillations de température journalières, puis en déduire la profondeur x_0 à laquelle l'amplitude des variations de température est 10 fois plus faible qu'en surface.

6. Faire de même pour le cas des oscillations de température annuelles, puis comparer les résultats obtenus.

Exercice 6 : Cuisson d'un « œuf dur »

La durée minimum de cuisson d'un œuf sortant du réfrigérateur à la température $T_0 = 4°\text{C}$ et plongé dans l'eau bouillante à la température $T_1 = 100°\text{C}$ est de l'ordre de 10 min pour obtenir un « œuf dur », c'est-à-dire où le blanc et le jaune sont solides. Un œuf est assimilé à une sphère de rayon $R = 2\,\text{cm}$, de masse volumique $\rho = 1{,}0\,\text{kg}\cdot\text{L}^{-1}$ et de capacité thermique massique $c = 3{,}3\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. On suppose que la température à l'intérieur de l'œuf est uniforme à chaque instant, et que les échanges conducto-convectifs à sa surface sont modélisés par la loi de Newton avec un coefficient de transfert h.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ de l'œuf.

2. Résoudre cette équation différentielle pour en déduire l'expression de $T(t)$.

Le blanc d'œuf coagule totalement à partir de 70°C, tandis que le jaune coagule totalement à partir de 85°C.

3. Estimer la valeur du coefficient de transfert h.